

ÉPREUVE ANTICIPÉE DE MATH (ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE)

Exercice

Comparaison de deux contrats de bail

Une étudiante cherche un logement pour la durée de ses études. Deux propriétaires lui proposent un contrat de location sur plusieurs années avec des modalités de révision du loyer différentes.

Au 1^{er} janvier 2026, le loyer mensuel initial pour les deux logements est fixé à **500 €**.

- **Option A (Contrat « Linéaire »)** : Le loyer mensuel augmente de **15 €** au 1^{er} janvier de chaque année.
- **Option B (Contrat « Exponentiel »)** : Le loyer mensuel augmente de **2,5%** au 1^{er} janvier de chaque année.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le loyer mensuel de l'option A et b_n le loyer mensuel de l'option B lors de l'année $(2026 + n)$.

Ainsi, $a_0 = 500$ et $b_0 = 500$.

Questions

Étude de l'Option A

- Calculer le montant du loyer a_1 en 2027 et a_2 en 2028.
- Préciser la nature de la suite (a_n) ainsi que sa raison.
- Exprimer a_n en fonction de n .

Étude de l'Option B

- Justifier que le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2,5% est égal à 1,025.
- Calculer le montant du loyer b_1 en 2027 et b_2 en 2028 (arrondir au centime d'euro).
- Préciser la nature de la suite (b_n) et exprimer b_n en fonction de n .

Comparaison des deux options

a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les loyers au centime d'euro) :

Année	n	Loyer Option A (a_n)	Loyer Option B (b_n)
2026	0	500 €	500 €
2027	1		
2028	2		
2029	3		
2030	4		
2035	9		

b) Quel contrat est le plus avantageux pour l'étudiante si elle reste **4 ans** dans le logement (de 2026 à 2029 inclus) ? Justifier.

c) Que remarque-t-on concernant l'évolution du loyer de l'Option B par rapport à l'Option A sur une longue période (en 2035 par exemple) ? Exposer la différence fondamentale entre ces deux modèles de croissance.

Corrigé détaillé

1. Étude de l'Option A

a) Calcul des premiers termes :

- En 2027 ($n=1$) : $a_1 = 500 + 15 = \mathbf{515 \text{ €}}$.
- En 2028 ($n=2$) : $a_2 = 515 + 15 = \mathbf{530 \text{ €}}$.

b) Nature de la suite (a_n) :

- Chaque année, le loyer augmente d'une quantité fixe (15 €).
- La suite (a_n) est donc une **suite arithmétique** de premier terme $a_0 = 500$ et de raison $r = 15$.

c) Expression de a_n en fonction de n :

$$a_n = 500 + 15n$$

2. Étude de l'Option B

a) Coefficient multiplicateur :

- Une augmentation de 2,5% correspond à un coefficient multiplicateur :

$$CM = 1 + 2,5/100 = 1 + 0,025 = 1,025$$

b) Calcul des premiers termes :

- En 2027 (n=1) : $b_1 = 500 \times 1,025 = 512,50 \text{ €}$.
- En 2028 (n=2) : $b_2 = 512,50 \times 1,025 = 525,3125 \approx 525,31 \text{ €}$.

c) Nature de la suite (b_n) :

- Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un facteur constant (1,025).
- La suite (b_n) est donc une **suite géométrique** de premier terme $b_0 = 500$ et de raison $q = 1,025$.

$$b_n = 500 \times 1,025^n$$

3. Comparaison des deux options

a) Tableau de valeurs complété :

Année	n	Loyer Option A (a_n)	Loyer Option B (b_n)
2026	0	500,00 €	500,00 €
2027	1	515,00 €	512,50 €
2028	2	530,00 €	525,31 €
2029	3	545,00 €	538,45 €
2030	4	560,00 €	551,91 €
2035	9	635,00 €	624,43 €

(Calcul pour 2035 : $a_9 = 500 + 15 \times 9 = 635$ et $b_9 = 500 \times 1,025^9 \approx 624,43$)

b) Option la plus avantageuse sur 4 ans (2026 à 2029 inclus) :

- Pour chaque année de $n=0$ à $n=3$, le loyer mensuel de l'Option B (b_n) est **strictement inférieur** à celui de l'Option A (a_n).
- L'étudiante paiera donc **moins cher** en choisissant l'**Option B**.

c) Analyse comparative de la croissance :

- **Au début :** L'Option A augmente plus vite que l'Option B car la hausse fixe de 15 € représente au départ une augmentation de **3%** ($15/500$), supérieure aux 2,5% de l'option B.
- **Sur le long terme (modèle théorique) :** La **croissance exponentielle** (Option B) finit toujours par rattraper et dépasser la **croissance linéaire** (Option A). En effet, l'augmentation en euros de l'Option B est de plus en plus grande chaque année (car calculée sur un montant de plus en plus élevé), alors que celle de l'Option A reste bloquée à **15 €**.

Cet exercice illustre la différence fondamentale entre une **croissance linéaire** (addition d'une quantité fixe) et une **croissance exponentielle** (multiplication par un coefficient constant). Sur le court terme, une augmentation en pourcentage peut sembler plus faible, mais sur le long terme, elle devient inexorablement plus rapide.